Classifying the irreducible components of moduli stacks of torsion-free sheaves on K3 surfaces and an application to Brill-Noether theory

水野　雄貴

早稲田大学　基幹理工学研究科　博士後期課程 1 年

目次

モジュライ空間・関手

モジュライ空間 . . . 特定の幾何学的対象をパラメトライズする多様体

例 (ベクトル束のモジュライ関手)

X : $\mathbb{C}$ 上の射影的スキーム

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bun}_X^n : (\mathrm{Sch}/\mathbb{C})^{\mathrm{op}} &\longrightarrow (\mathrm{Sets}) \\
Y &\longmapsto \{ Y \times_{\mathbb{C}} X \text{ 上の階数 } n \text{ のベクトル束の同型類全体} \}
\end{aligned}
$$

スキーム $M/\mathbb{C}$ に対して, 関手的同型

$$\mathrm{Bun}_X^n(-) \simeq \mathrm{Hom}(-, M)$$

が成立すれば, M を X 上の階数 **n** のベクトル束のモジュライ空間という.

<u>注意</u>

$Y := \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ とすれば,

$$\mathrm{Bun}_X^n(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), M)$$

より、

$$\{X \text{ 上の階数 } n \text{ のベクトル束の同型類} \} = \{\mathrm{M} \text{ の点} \}$$

モジュライ空間・関手

しかし, 一般にはモジュライ空間 M は存在しない

(∵)M が存在するとする.

$$\mathscr{E} \in \mathrm{Bun}_X^n(Y) \simeq \mathrm{Hom}(Y, M), \quad \pi : Y \times X \to Y, \quad \mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(Y), \quad \mathscr{E}' := \mathscr{E} \otimes \pi^* \mathscr{L}$$

のもとで, $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ はそれぞれ $\varphi, \varphi' : Y \to M$ を定める. $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ は局所的には同型より, $\varphi = \varphi'$ となり, $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}'$ となる. しかし, 一般に $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ は同型でない. □

(原因は $\mathscr{E}$ に非自明な自己同型が存在しうること.)

二つの解決法

- パラメトライズする層を制限する. (安定性の概念の導入)
- 層の自己同型の情報も反映されるようにモジュライ関手を変える.
  (sets への関手でなく, groupoid への関手にする.)

モジュライスタック

後者の解決法がスタックの概念の導入にあたる.
ベクトル束のモジュライスタックがどのようなものか見る.

例 (ベクトル束のモジュライスタック/関手 ver)

X : $\mathbb{C}$ 上の射影的スキーム

$$\begin{aligned} \mathrm{Bun}_X^n : (\mathrm{Sch}/\mathbb{C})^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Groupoids} \\ Y &\longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{対象}.\, Y \times_{\mathbb{C}} X \text{ 上の階数 n のベクトル束の同型類} \\ \text{射}.\ \text{ベクトル束の同型} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

例 (ベクトル束のモジュライスタック/圏 ver)

対象. $(Y, \mathscr{E})$,
$Y : \mathrm{Sch}/\mathbb{C}$ と $\mathscr{E} : Y \times_{\mathbb{C}} X$ 上の階数 n のベクトル束

射. $(f, \alpha) : (Y, \mathscr{E}) \to (Y', \mathscr{E}')$ s.t. $f : Y \to Y'$, $\alpha : \mathscr{E} \xrightarrow{\simeq} (f \times id)^* \mathscr{E}'$

結果の概要

ピカール数が 1 の K3 曲面の階数が 2 の
torsion-free 層のモジュライスタックの既約分解
&
点のヒルベルトスキームの **Brill-Noether** 軌跡の既約分解への応用.

先行研究

- 線織曲面の場合

$\rightarrow$ C.Walter (1995)

- モジュライスタックのストラティフィケーション

$\rightarrow$ V.Hoskins (2018) or T.L.Gomez, I.Sols and A.Zamora (2015)

K3 曲面、向井ベクトル

0. X : 射影曲面/$\mathbb{C}$
   X : **K3 曲面** $\overset{\text{def}}{\iff} H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0, \omega_X \simeq \mathscr{O}_X$
1. $E \in \mathrm{Coh}(X)$
   $\boldsymbol{v(E) := (\mathrm{rk}(E), c_1(E), \mathrm{ch}_2(E) + \mathrm{rk}(E))} \in \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$
2. $\boldsymbol{\langle v, w\rangle := -[v]_0[w]_2 + [v]_1[w]_1 - [v]_2[w]_0} \in \mathbb{Z}$
   ここで,
   $v := ([v]_0, [v]_1, [v]_2), w := ([w]_0, [w]_1, [w]_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$

モジュライスタック

3. $\mathscr{M}(v)$ **:**

対象. 向井ベクトルが v の torsion-free 層をパラメトライズする平坦族 $\mathscr{E}/Y$

射. $(\varphi, \alpha) : \mathscr{E}/Y \to \mathscr{E}'/Y'$

$$\left(\varphi : Y \to Y', \alpha : \mathscr{E} \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{id}_X \times \varphi)^* \mathscr{E}'\right)$$

4. $\mathscr{M}^{\mathrm{HN}}_{(v_1, v_2)}(v) :=$

$$\left\{ E \in \mathscr{M}(v) \;\middle|\; \begin{array}{c} {}^{\exists}(0 \subset E_1 \subset E) : \text{HN-フィルトレーション} \\ \text{s.t. } v(E_1) = v_1, v(E/E_1) = v_2 \end{array} \right\}$$

5. $\mathscr{M}^{\mathrm{ss}}(v) := \{E \in \mathscr{M}(v) \mid E : \text{半安定}\}$

$\mathscr{M}(v)$ に付随する位相空間

注意

$\mathscr{M}(v)$ には以下の位相空間が付随させせることができる.

$$|\mathscr{M}(v)| = \left\{ \text{向井ベクトルが } v \text{ である } X \text{ 上の torsion-free 層の同型類} \right\}.$$

一つ目の主結果では, この位相空間の既約分解に関する結果を述べる.
また特に断らない場合, $|\mathscr{M}(v)|$ は $\mathscr{M}(v)$ と同じ記号で表すことにする.

記号

これ以降, X は常にピカール数が 1 の K3 曲面を表すことにする.

$\mathscr{M}(v)$ の既約分解

主定理 1

v_0 : 原始的な向井ベクトル , $v := mv_0$ $(m \in \mathbb{Z})$
$[v]_0 = 2$ とする. この時,

$$\mathscr{M}(v) = \begin{cases} \overline{\mathscr{M}^{ss}(v)} \cup \bigcup_{\langle v_1, v_2 \rangle \leq 1} \overline{\mathscr{M}^{HN}_{(v_1, v_2)}(v)} & \langle v_0, v_0 \rangle \geq -2 \\ \bigcup \overline{\mathscr{M}^{HN}_{(v_1, v_2)}(v)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathscr{M}(v)$ の既約分解

注意

主定理 1 の証明に関しては,

- HN-フィルトレーションによるストラティフィケーションの理論
- K3 曲面の安定層のモジュライ空間の理論 by K.Yoshioka

が重要になっている.

$\rightsquigarrow$ 次元の計算などによってストラタ間の関係が記述できる.

Brill-Noether 理論への応用

定義 (点のヒルベルトスキームの BN 軌跡)

D : X 上の有効因子
$N \in \mathbb{N}$ s.t. $N \leq h^0(\mathscr{O}(D))$

$$\boldsymbol{W_N^i(D) := \{Z \in \mathrm{Hilb}^N(X) \mid h^1(\mathscr{I}_Z(D)) \geq i+1\}}$$

注意

$$H^0(\mathscr{I}_Z(D)) - \{0\}/\mathbb{C}^* = Z \text{ を通り } D \text{ に線形同値な有効因子.}$$

一般の $Z \in \mathrm{Hilb}^N(X)$ について,

$$h^0(\mathscr{I}_Z(D)) = h^0(\mathscr{O}_X(D)) - \ell(\mathscr{O}_Z) = \text{期待次元.}$$

しかし, $Z \in W_N^i(D)$ について,

$$h^0(\mathscr{I}_Z(D)) > h^0(\mathscr{O}_X(D)) - \ell(\mathscr{O}_Z).$$

※ $h^0(\mathscr{I}_Z(D)) = h^0(\mathscr{O}_X(D)) - \ell(\mathscr{O}_Z) + h^1(\mathscr{I}_Z(D))$.

Brill-Noether 理論への応用

主定理 2

$D := nH$, $v := (2, nH, \frac{n^2H^2}{2} - N + 2)$ とする.
ここで, H : Pic(X) の生成する豊富な直線束.
この時, 次の集合間に 1:1 の対応が存在する.

$$\left\{ \boldsymbol{W^0_N(D)} \text{ の既約成分} \right\}$$

$$\textbf{1 to 1} \Big\updownarrow$$

$$\left\{ \overline{\mathscr{M}^{\mathbf{HN}}_{(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})}(\boldsymbol{v})} \;\middle|\; (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) \text{ は } (*) \text{ を満たす} \right\} \cup \left\{ \overline{\mathscr{M}^{\mathbf{ss}}(\boldsymbol{v})} \right\}$$

$$\subsetneq \{ \mathscr{M}(\boldsymbol{v}) \text{ の既約成分 } \} .$$

$$[v_1]_1, [v_2]_1 \neq 0 : \text{有効因子}, \langle v_1, v_2 \rangle \leq 1, [v_2]_2 \geq -1 \qquad (*)$$

注意

- Z : $W^0_N(D)$ の一般の元とすれば, 対応する拡大は

$$0 \to \mathscr{O}_X \to E \to \mathscr{I}_Z(D) \to 0.$$

- 定理 2 $\rightsquigarrow$ (非空性,) $W^0_N(D)$ の既約成分の次元や数.

ご静聴ありがとうございました。