Bondal-Orlov's reconstruction theorem in noncommutative projective geometry

早稲田大学　基幹理工学部　応用数理学科
水野 雄貴 (Yuki Mizuno) *

Abstract

滑らかな射影スキームで標準束が豊富または反豊富なものは, その導来圏によって復元できることが知られている ([BO01]). 一方で, 射影スキームの類似として非可換次数付き代数に付随する非可換射影スキームがアーベル圏として定義できる ([AZ94]). 本講演では, [Miz24a] で証明した非可換射影幾何学における Bondal-Orlov の復元定理について紹介する.

1　導入

代数幾何学で扱う代数多様体やその一般化となるスキームを考える時, その上の (準) 連接層の圏は十分多くの多様体の情報を持っている. 実際, ネータースキームは連接層の圏により復元されることが P. Gabriel によって示されている.

定理 1.1 ([Gab62])**.** *ネータースキーム X, Y に対して,*

$$\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{Coh}(Y) \Rightarrow X \simeq Y.$$

一方で, 代数多様体の連接層の導来圏は必ずしも多様体を復元できるとは限らない. 実際, [Muk81] により, アーベル多様体とその双対アーベル多様体の導来圏は同型であることが知られている. ただ, 標準束が豊富または反豊富な射影スキームに対しては, その導来圏によって射影スキームを復元できることが知られている.

定理 1.2 ([BO01])**.** *滑らかな体 k 上の射影スキーム X, Y に対して, X, Y が標準束が豊富 (または反豊富) であるとする.*

$$D^b(\mathrm{Coh}(X)) \simeq D^b(\mathrm{Coh}(Y)) \Rightarrow X \simeq Y.$$

本講演の主題はこの Bondal-Orlov の復元定理を非可換射影幾何学に拡張することである. 非可換射影幾何学は最初, M. Artin と J. J. Zhang によって 1994 年 ([AZ94]) に導入された概念である. 非可換射影スキームの定義の背景には以下の Serre による定理 ([Ser55]) がある.

定理 1.3 ([Ser55])**.** *R を体 k 上の有限生成な次数付き可換代数で, 次数 1 で生成されるとする. この時, 射影多様体 $X = \mathrm{Proj}(R)$ に対して,*

$$\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{qgr}(R) := \mathrm{gr}(R)/\mathrm{tor}(R).$$

ただし, $\mathrm{gr}(R)$ は R 上の有限生成次数付き R-加群の圏で, $\mathrm{tor}(R)$ は捩れ加群を対象とする部分圏である. そして, $\mathrm{qgr}(R) := \mathrm{gr}(R)/\mathrm{tor}(R)$ は $\mathrm{gr}(R)$ の $\mathrm{tor}(R)$ による Serre 商圏である.

この結果を踏まえて, k 上の右ネーターな次数付き代数 A に対して, その非可換射影スキームを $\mathrm{qgr}(A) = \mathrm{gr}(A)/\mathrm{tor}(A)$ として定義する. ただし, $\mathrm{gr}(A)$ は A 上の有限生成次数付き右 A-加群の圏で, $\mathrm{tor}(A)$ は捩れ加群を対象とする部分圏である. そして, 主結果は以下のように述べられる.

*E-mail:mizuno.y@aoni.waseda.jp, m7d5932a72xxgxo@fuji.waseda.jp

定理 1.4 ([Miz24a, Theorem 1.5])**.** *k 上のネーターな連結な次数付き k 代数 A, B に対して, 付随する非可換射影スキームが標準両側加群を持ち, 豊富 (または反豊富) であるとする. この時,*

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

上の定理中にある標準両側加群や豊富, 反豊富という条件は, 後の節で定義する. また, この定理の系として, 非可換次数付き代数の中でも多項式環に相当する重要なクラスである AS 正則代数に関して次の結果が得られる.

系 1.5 ([Miz24a, Corollary 1.6])**.** *A, B を k 上のネーター AS 正則代数とする. この時,*

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

注意 1.6. 定理 1.4 や系 1.5 は, A, B が局所有限なネーター次数つき k 代数というより一般的な条件で成り立つが簡単のためにこのように述べた.

この他にも, [Miz24a] では, 非可換射影スキームの導来圏間の充満忠実関手が Fourier-向井型であることも示している. この結果は, [LO10] の結果の非可換射影幾何学への拡張だと言える.

本レポートでは, 非可換射影幾何学に馴染みのない読者にも理解しやすいように, まずは非可換射影スキームの定義と基本的な性質についてある程度詳しく説明する. そのため, どちらかというと非可換射影幾何学の入門としての性格が強いと思われる. その後, 主結果である非可換 Bondal-Orlov の復元定理について述べる. 結果の詳細については, 講演で聞いていただければと幸いである.

2 非可換射影幾何学のまとめ

ここでは, 非可換射影幾何学の基本的な定義や性質について述べる. 文献としては, [AZ94] などを主に参考にした.

2.1 導入

記号 2.1.

1. k は体を表す.
2. $A := \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ は k 上の $\mathbb{N}$-次数付き代数を表す.
3. $\mathrm{Gr}(A)$ で次数付き右 A-加群の圏を表す.
4. $\mathrm{gr}(A)$ で有限生成次数付き右 A-加群の圏を表す.
5. $M \in \mathrm{Gr}(A), n \in \mathbb{Z}$ に対して, $M(n) \in \mathrm{Gr}(A)$ を $M(n) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{n+i}$ と定義する.

注意 2.2. A については, 連結 (i.e., $A_0 = k$) や k-代数として有限生成であることをしばしば仮定する. A が右ネーターであれば, $\mathrm{gr}(A)$ はアーベル圏である. $\mathrm{Gr}(A)$ は A のネーター性に関わらず, アーベル圏である. また, 非可換代数は有限生成だからといって必ずしもネーターであるとは限らない. (例. k 上の自由代数)

定義 2.3 (非可換射影スキーム)**.** A は右ネーターな次数付き k 代数とする. このとき, A に付随する**非可換射影スキーム** $\mathrm{qgr}(A)$ は次の圏で定義される.

- 対象: A 上の有限生成次数付き右加群
- 射: $M, N \in \mathrm{gr}(A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{qgr}(A)}(\pi(M), \pi(N)) := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(A)}(M_{\geq n}, N_{\geq n})$. ただし, $M_{\geq n} := \bigoplus_{i \geq n} M_i$, $\pi : \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{qgr}(A)$ は自然な射影.

また, $\mathcal{O}_A := \pi(A)$ として, $\mathrm{proj}_{\mathrm{nc}}(A) := (\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A)$ と書き, こちらを非可換射影スキームと定義することも多い.

非可換射影スキームの定義をするには, これで十分であるが, 実はこれは $\mathrm{gr}(A)$ の $\mathrm{tor}(A)$ による (Serre) 商圏の定義を具体的に述べたに過ぎない. (Serre) 商圏の一般論について, 知っておくことは色々便利であるので, 以下で述べておく.

2.2 Serre 部分圏と商圏

定義 2.4 (Serre 部分圏, 例えば, [Pop73, Section 4.3])**.** $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ の充満部分圏とする. このとき, $\mathcal{C}$ が *Serre* **部分圏**であるとは, 任意の $\mathcal{A}$ 上の短完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

に対して, $Y \in \mathcal{C}$ であることと $X, Z \in \mathcal{C}$ であることが同値であることをいう.

定理 2.5 (例えば, [Pop73, Section 4.3, Theorem 3.3])**.** *$\mathcal{A}$ をアーベル圏, $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ の Serre 部分圏とする. この時, あるアーベル圏 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ とアーベル圏の間の完全関手 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ が存在して, 以下の条件を満たす.*

- $\pi(\mathcal{C}) = 0$.
- *$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は $F(\mathcal{C}) = 0$ を満たす完全関手であるとする.*

  この時, $G : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が存在して, $F \simeq G \circ \pi$ となる. かつ, G は自然同型を除いて一意である.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{A}/\mathcal{C} \arrow[d, dashed, "\exists! G"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

この時, $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{C}$ による (Serre) 商圏という.

定義 2.6. A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $M \in \mathrm{Gr}(A)$ が**捩れ** *(torsion)* **加群**であるとは, 任意の $m \in M$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $mA_{\geq n} = 0$ となることをいう. また, 捩れ加群全体のなす $\mathrm{Gr}(A)$ の部分圏を $\mathrm{Tor}(A)$ と書く. さらに, $\mathrm{gr}(A)$ の部分 $\mathrm{tor}(A)$ を $\mathrm{tor}(A) := \mathrm{gr}(A) \cap \mathrm{Tor}(A)$ と定義する.

定理 2.7. *A を右ネーターな次数付き k 代数とする.*

(1) $\mathrm{Tor}(A)$ と $\mathrm{tor}(A)$ はそれぞれ, $\mathrm{Gr}(A)$ と $\mathrm{gr}(A)$ の *Serre* 部分圏である.

(2) $\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{gr}(A)/\mathrm{tor}(A)$.

2.3 その他の基本的性質や定義

よって, 最初の非可換射影スキームの定義 2.3 は, 定理 2.5 における Serre 商圏としてかけること述べることができた. したがって, $\mathrm{qgr}(A)$ と同様に, $\mathrm{QGr}(A)$ を $\mathrm{Gr}(A)/\mathrm{Tor}(A)$ として定義することにする. さらに, $\mathrm{qgr}(A)$ をアーベル圏の一般論に組み込むことができたので, 様々な良い性質を確かめることができるので, それらを紹介することにする.

命題 2.8. *A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $\pi : \mathrm{Gr}(A) \to \mathrm{QGr}(A)$ は右随伴関手*

$$\omega : \mathrm{QGr}(A) \to \mathrm{Gr}(A)$$

を持ち,

- $\omega \circ \pi \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}(A)}$.
- ω : 忠実充満関手.
- $\omega(\mathcal{M})$ は捩れなし *(torsion-free)* $(\mathcal{M} \in \mathrm{QGr}(A))$.

さらに, $M \in \mathrm{Gr}(A)$ に対して,

$$(\omega \circ \pi)(M) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Hom}}_A(A_{\geq n}, M),$$

ここで,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(N, M) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(N, M(i))$$

と定義する.

また, 次が知られている.

命題 2.9. *A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $\mathrm{QGr}(A)$ は入射的対象が十分多く存在する.*

したがって, 可換な場合と同様にコホモロジーを考えることができる.

定義 2.10 ([AZ94, Section 7])**.** A を右ネーターな次数付き k 代数とする. $M \in \mathrm{Gr}(A)$ に対して, $i \in \mathbb{N}$ に対して, i 次の**コホモロジー**を

$$H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) := \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{QGr}(A)}(\mathcal{O}_A, \pi(M))$$

と定義する.

さらに, コホモロジーに関しては, [Har77, Theorem III.5.2] にあるような Serre の有限性定理が成り立つ.

ただ, 定理を述べるには, χ-条件と呼ばれる非可換代数特有の条件を述べる必要がるので, それについてまずは述べることにする.

定義 2.11 ([AZ94, Definition 3.2, 3.7, Proposition 3.11])**.** A は局所有限な右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, A が χ_i **条件**を満たすとは, 任意の $M \in \mathrm{gr}(A), j \leq i$ に対して, $\underline{\mathrm{Ext}}^j_A(A_0, M)$ が有界, すなわち, ある $k, l \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_A(A_0, M)_n = 0, \quad {}^\forall n \leq k,\ l \leq {}^\forall n$$

となることをいう. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, A が χ_i 条件を満たすとき, A は χ **条件**を満たすという. また, A^{op} が χ 条件を満たすとき, A は χ^{op} **条件**を満たすという.

注意 2.12. この χ 条件の定義は, [AZ94] において, 最初定義された χ 条件とは異なる. [AZ94] における χ° 条件と呼ばれるものとなっている. こちらの定義を採用した理由としては, A が局所有限な右ネーターな次数付き k 代数である時は, 元々の χ 条件と χ° 条件が同値であるためである. さらに, 元々の χ 条件より見やすいことも理由の一つである.

定理 2.13 ([AZ94, Theorem 7.4])**.** *A は局所有限な右ネーターな次数付き k 代数で, χ 条件を満たすとする. $M \in \mathrm{gr}(A)$ に対して, 以下が成り立つ.*

(1) $\dim_k H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) < \infty$.

(2) $H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) = 0$ *for* $i \gg 0$.

逆に, A が χ_1 条件と上記の (1),(2) を満たすとき, A は χ 条件を満たす.

この定理から, χ 条件は自然な条件であることと考えることができるだろう.

2.4 Artin-Zhang 理論について

非可換射影幾何学において, アーベル圏 $\mathrm{qgr}(A)$ が中心的な研究対象となることは, これまで述べたことからなんとなく理解できるだろう. それでは, 逆にいつ任意のアーベル圏が $\mathrm{qgr}(A)$ として記述できるか考えることは自然な問いであるように思われる. この問いに対して, 一つの答えを出したのが Artin-Zhang による [AZ94] における主結果となる. ここではその結果について述べる.

まず, この節で中心となる定義を述べる.

定義 2.14. 代数的 *3* **つ組** *(algebraic triple)* とは, 以下のようなデータの組 $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ のことをいう.

- $\mathcal{A}$: アーベル圏.
- $\mathcal{O}$: $\mathcal{A}$ の対象.
- $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$: 自己同値関手.

次の例が我々が念頭に置いている代数的 3 つ組の例である.

例 2.15.

1. A : 右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1))$ は代数的 3 つ組である. ここで, $(1) : \mathrm{qgr}(A) \to \mathrm{qgr}(A)$ は $(1) : \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(A)$ から誘導される自己同値関手である.
2. X : k 上の射影スキームとし, $\mathcal{O}_X$ を構造層, $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層の圏, L を直線束とする. この時, $(\mathrm{Coh}(X), \mathcal{O}_X, - \otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ は代数的 3 つ組である.

定義 2.16 ([AZ94, page 237])**.** $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ と $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}', \mathcal{O}', s')$ を 2 つの代数的 3 つ組とする. この 2 つの間の**射** $(F, \tau, \mu) : (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s) \to (\mathcal{A}', \mathcal{O}', s')$ とは, 以下のデータの組みである.

- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$: アーベル圏の間の関手.
- $\tau : F(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'$: 同型射.
- $\mu : F \circ s \Rightarrow s' \circ F$: 自然同型.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, "s'"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\mu"] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

F が圏同値である時, この射を**代数的** *3* **つ組の同型**という.

定義 2.17 ([AZ94, page 250])**.** $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 3 つ組とする. この時, s が $\mathcal{T}$ に関して**豊富** *(ample)* であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう:

- 任意の $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ に対して, ある $\ell_1, \cdots, \ell_p \in \mathbb{N}$ と エピ射

  $$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{p} s^{-\ell_i}(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}.$$

  が存在する.
- 任意の $\mathcal{A}$ におけるエピ射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して, 自然な射

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{M})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{N}))$$

  が全射である.

また, s^{-1} が $\mathcal{T}$ に関して豊富であるとき, s は**反豊富** *(anti-ample)* であるという.

例 2.18. X を k 上の射影スキームとし, $\mathcal{O}_X$ を構造層, $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層の圏, L を豊富な直線束とする. この時, $-\otimes_{\mathcal{O}_X} L$ は $(\mathrm{Coh}(X), \mathcal{O}_X, -\otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ に関して豊富である.

命題 2.19 ([AZ94, Proposition 4.4])**.** *A : 右ネーターな次数付き k 代数で, χ_1 条件を満たすとする. この時, (1) は $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1))$ に関して豊富である.*

これで, Artin-Zhang の主結果を述べる準備が整った.

定理 2.20 ([AZ94, Theorem 4.5])**.** *(1) $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 3 つ組とする. $\mathcal{T}$ は以下の条件を満たすとする.*

(a) $\mathcal{O}$ はネーターな対象.

(b) $A_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ は右ネーター環であり, 任意の $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ に対し, $H^0(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ は A_0-加群として有限生成.

(c) s は $\mathcal{T}$ に関して豊富.

$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(s^n(\mathcal{O})) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{O}))$ とする. この時, A は右ネーターな次数付き k 代数で χ_1 条件を満たす. そして, 代数的 3 つ組の同型 $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1)) \simeq \mathcal{T}$ が存在する.

(2) 逆に, B が右ネーターな次数付き k 代数で χ_1 条件を満たすとする. この時, 代数的 3 つ組の同型 $(\mathrm{qgr}(B), \mathcal{O}_B, (1))$ は (1) の (a), (b), (c) を満たす.

2.5 双対化複体について

可換な場合は, 射影スキームの Serre 双対性やその一般化である Serre 関手の存在が知られている. ここでは, 同様の結果が非可換射影スキームにも成り立つことを述べる. そのために, 双対化複体について述べる.

定義 2.21 ([Yek92, Definition 3.3, 4.1], [Yek20, Chapter 17])**.** A をネーターで連結な次数付き k 代数とする. この時に, A の**双対化複体** *(dualizing complex)* とは, 以下のような性質を満たす複体 $R_A \in D^b(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}}))$ のことをいう.

(1) 任意の i に対して, $H^i(R_A)$ は A, A^{op} 上有限生成.

(2) R_A は A, A^{op} 上有限な単射次元を持つ.

(3) 自然な $D^b(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}}))$ の射

$$\Phi : A \to \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(R_A, R_A), \quad \Phi^{\mathrm{op}} : A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(R_A, R_A)$$

は同型射になる.

さらに, 以下の条件を満たす時, R_A は *balanced* という.

(4) $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(-) := \varinjlim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{Hom}}_A(A/A_{\geq n}, -), A' := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(A_{-i}, k)$ とした時, 以下の同型が成り立つ.

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(R_A) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_{A^{\mathrm{op}}}}(R_A) \simeq A' \in D(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}})).$$

ここで, $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}$ は $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}$ の導来関手を表す.

双対化複体の名前の由来は双対化複体が以下のような双対化関手を持つことに由来する (と思われる).

命題 2.22 ([Yek92, Proposition 3.5])**.** *A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．A が双対化複体 R_A を持つとする．この時，次の関手 D_A, D_A^{op}*

$$\begin{aligned} D_A : D^b(\mathrm{gr}(A))^{\mathrm{op}} \to D^b(\mathrm{gr}(A^{\mathrm{op}})), &\quad M \mapsto \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, R_A), \\ D_A^{\mathrm{op}} : D^b(\mathrm{gr}(A^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}} \to D^b(\mathrm{gr}(A)), &\quad N \mapsto \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(N, R_A) \end{aligned}$$

は圏同値を与える．

また, balanced な双対化複体が存在することは, χ 条件と深く関係している．

定理 2.23 ([VdB97, Theorem 6.3])**.** *A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．この時，A が balanced な双対化複体を持つことと，以下の 2 条件を満たすことが同値である．*

(1) A は χ, χ^{op} 条件を満たす．

(2) $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}, \Gamma_{\mathfrak{m}_{A^{\mathrm{op}}}}$ のコホモロジー次元が有限である．

さらに，この時，R_A は $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(A)'$ により与えられる．

以下で, 双対化複体の存在によって, 非可換射影スキームの Serre 双対性が成り立つことを述べる．

定理 2.24 ([DNB04, Theorem A.4])**.** *A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．また，A は balanced な双対化複体 R_A を持つとする．さらに，$\mathrm{qgr}(A)$ は有限な大域次元を持つとする．この時，以下で定義される関手*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A : D^b(\mathrm{qgr}(A)) &\to D^b(\mathrm{qgr}(A^{\mathrm{op}})), \\ \pi(M) &\mapsto \pi(M \otimes_A^{\mathbb{L}} R_A)[-1] \end{aligned}$$

は Serre 関手となる，すなわち，$\mathcal{S}_A$ は $D^b(\mathrm{qgr}(A))$ の自己同値関手となり，任意の $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathrm{qgr}(A))$ に対して，k 上の同型

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{qgr}(A))}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{qgr}(A))}(\mathcal{N}, \mathcal{S}_A(\mathcal{M}))^\vee$$

を満たす．

注意 2.25. この節では, 連結なネーター次数付き代数のみについて述べたが, 局所有限なネーター次数付き代数についても同様の結果が成り立つことが同様にして確かめることができる (cf. [Miz24a, Section 2.2]).

また, 主結果の説明に必要な標準両側加群の定義について述べておく．

定義 2.26. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする．この時, $\mathcal{C}$ の**標準両側加群**とは, $\mathcal{C}$ の自己同値関手で F で, ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 導かれる自己同値関手

$$F[n] : D^b(\mathcal{C}) \to D^b(\mathcal{C})$$

が Serre 関手となるもののことをいう．

例 2.27. X を滑らかな k 上の射影スキームとし, ω_X を標準束とする．この時, $- \otimes_X \omega_X$ は $\mathrm{Coh}(X)$ の標準両側加群である．n としては $\dim X$ を取ればよい．

2.6 Artin-Schelter(AS) 正則代数について

この節では, 非可換射影幾何学において重要な研究対象である Artin-Schelter(AS) 正則代数について述べる. 早速, AS 正則代数の定義を述べる.

定義 2.28 ([AS87])**.** A を連結次数付き k 代数とする. A が以下の条件を満たす時, A は *Artin-Schelter(AS)* **正則**であるという.

1. A の大域次元は有限 (d とする).
2. A の GK 次元は有限.
3. A は Gorenstein 条件を満たす, すなわち, ある整数 l が存在して, 以下が成り立つ.

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(k, A) \simeq \begin{cases} k(l) & (i = d), \\ 0 & (i \neq d). \end{cases}$$

ここで, l は A の *Gorestein* **パラメーター**という.

注意 2.29. A の GK 次元は有限という条件は, A の Hilbert 関数 $h_A(n) = \dim_k A_i$ が多項式増加であることすなわち, 多項式関数で押さえられることを意味する. この条件は, A がネーターの場合は自動的に成り立つ. また, この AS 正則代数の定義は連結な場合のみだが, 局所有限な場合にも同様の定義が存在し, 連結な場合と同様に豊かな理論が展開されている (例えば, [MM11] を見よ).

以下では, AS 正則代数の例をいくつか紹介する (興味のある方は, サーベイ論文 [Rog23] を見よ).

例 2.30. 有限生成で可換な AS 正則代数は, (重みつき) 多項式環に限られる. よって, この意味で, AS 正則代数は多項式環の非可換版と考えることができる.

例 2.31. 有限生成な大域次元 1 の AS 正則代数は, 1 変数多項式環 $k[x]$ に限られる.

例 2.32. 有限生成な大域次元 2 の AS 正則代数は, 以下の 2 つに限られる.

(1) $k[x, y]_q = k\langle x, y\rangle/(xy - qyx)$ $(0 \neq q \in k)$.

(2) $k\langle x, y\rangle/(xy - yx - y^2)$.

前者は**量子平面**と, 後者は *Jordan* **平面**としばしば呼ばれる.

AS 正則代数の分類は, 大域次元 3 から複雑になってくる. ここでは, 大域次元 3 の AS 正則代数の中でも重要な Sklyanin 代数について述べる.

例 2.33. k 上の代数 $S_{a,b,c}$ $(a, b, c \in k)$ を以下で定義する.

$$S_{a,b,c} := k\langle x, y, z\rangle/(f_1, f_2, f_3) \quad (\deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 1),$$
$$f_1 = ayz + bzy + cx^2, \ f_2 = azx + bxz + cy^2, \ f_3 = axy + bxy + cz^2.$$

ただし, $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ とみなす時,

$$[a : b : c] \notin \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\} \cup \{[\alpha : \beta : \gamma] \mid \alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3\}$$

とする. この時, $S_{a,b,c}$ は AS 正則代数となり, この代数を *Sklyanin* **代数**と呼ぶ.

大域次元が 4 以上の AS 正則代数の分類はまだ全くの未解決問題であるが, elliptic algebra を始めとした様々な興味深い例が知られている.

3 主結果について

再度, 本研究の主結果を述べる.

定理 3.1 ([Miz24a, Theorem 1.5])**.** *k 上のネーターな連結な次数付き k 代数 A, B に対して, 付随する非可換射影スキーム $\mathrm{qgr}(A), \mathrm{qgr}(B)$ が標準両側加群 $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ を持ち, 豊富 (または反豊富) であるとする. この時,*

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

系 3.2 ([Miz24a, Corollary 1.6])**.** *A, B を k 上のネーター AS 正則代数とする. この時,*

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

3.1 主結果の証明について

定理 3.1 の証明における主な目標は (反) 標準環の同型を導くことである. (反) 標準環は以下のように定義される.

定義 3.3. $\mathcal{T} = (\mathcal{C}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 3 つ組とする. この時に, $\mathcal{T}$ の**標準環** $R_{can}(\mathcal{T})$ **または反標準環** $R_{anti\text{-}can}(\mathcal{T})$ とは,

$$R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{O})), \quad R_{\text{anti-can}}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}, s^{-n}(\mathcal{O}))$$

により定義される $\mathbb{Z}$ 次数付き環のことをいう.

詳細に言えば, 代数的 3 つ組 $\mathcal{T}_A := (\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, \omega_{\mathrm{qgr}(A)}), \mathcal{T}_B := (\mathrm{qgr}(B), \mathcal{O}_B, \omega_{\mathrm{qgr}(B)})$ に関して, これらに付随する (反) 標準環が同型であることを示すことが目標となる. もし, これらが示されれば, 定理 2.20 より $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ が豊富なときは,

$$\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}_A)) \simeq \mathrm{qgr}(R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}_B)) \simeq \mathrm{qgr}(B)$$

となり, 主結果が従う ($\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ が反豊富な場合は, $R_{\text{anti-can}}$ を用いればよい.). これを実際に示すには, 様々な準備が必要である. ここでは紙面の都合上, 詳細は省略するが, 非可換射影スキームにおける Fourier-向井関手の性質の調べることや充満忠実関手が常に Fourier-向井関手となることを示すことが重要である. 加えて, 非可換射影スキームにおける Fourier-向井関手の定義には, dg 圏 (または $\mathbb{Z}$-代数) の概念が本質的に必要となるため, より多くの概念の導入が必要となる. 元々の Bondal と Orlov の [BO01] における可換な場合の証明は, point-like object や invertible object のような概念を用いていたが, 非可換射影幾何学ではそのような概念を用いた議論が難しいため, 代わりに Fourier-向井関手を用いる議論を行うことにした (cf. [Huy06, Proposition 6.1]).

系 3.2 についても少し述べる. 系の証明には AS 正則代数 A が, $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}$ が反豊富であることを示す必要がある. A の Gorenstein パラメーター l が正であることは, よく知られているのだが, そこから $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}$ が反豊富であることが直接従うわけではない. ここで, A の quasi-Veronese 代数 $A^{[l]}$ というものを考える必要が出てくる. これを考える理由としては, $A^{[l]}$ が Gorenstein パラメーターが 1 となり, $\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(A^{[l]})$ となることが分かるからである ([Miz24b], [MM11]). したがって, $A^{[l]}$ に対して, 定理 3.1 を適用することができる. ただ, ここで注意なのは, $A^{[l]}$ は一般に連結ではないことである. これが, [Miz24a] において, 連結でない場合にも定理 3.1 を示した理由となる. また, A が AS-Gorenstein の場合も同じように Gorenstein パラメーター 1 の場合に帰着することができれば, 同様の議論ができる.

References

[AZ94] M. Artin and J. J. Zhang. "Noncommutative Projective Schemes". *Adv. Math.* **109.2** (1994), pp. 228–287.

[AS87] M. Artin and W. F. Schelter. "Graded algebras of global dimension 3". *Adv. in Math.* **66.2** (1987), pp. 171–216.

[BO01] A. Bondal and D. Orlov. "Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences". *Compos. Math.* **125.3** (2001), pp. 327–344.

[DNB04] K. De Naeghel and M. Van den Bergh. "Ideal classes of three-dimensional Sklyanin algebras". *J. Algebra* **276.2** (2004), pp. 515–551.

[Gab62] P. Gabriel. "Des catégories abéliennes". *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), pp. 323–448.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. No. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, pp. xvi+496.

[Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, pp. viii+307.

[LO10] V. Lunts and D. Orlov. "Uniqueness of enhancement for triangulated categories". *J. Amer. Math. Soc.* **23.3** (2010), pp. 853–908.

[MM11] H. Minamoto and I. Mori. "The structure of AS-Gorenstein algebras". *Adv. Math.* **226.5** (2011), pp. 4061–4095.

[Miz24a] Y. Mizuno. *Bondal-Orlov's reconstruction theorem in noncommutative projective geometry*. 2024. arXiv: 2411.07813 [math.AG].

[Miz24b] Y. Mizuno. "Some examples of noncommutative projective Calabi–Yau schemes". *Canad. Math. Bull.* **67.3** (2024), pp. 706–726.

[Muk81] S. Mukai. "Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves". *Nagoya Math. J.* **81** (1981), pp. 153–175.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*. Vol. No. 3. London Mathematical Society Monographs. Academic Press, London-New York, 1973, pp. xii+467.

[Rog23] D. Rogalski. *Artin-Schelter Regular Algebras*. 2023. arXiv: 2307.03174 [math.RA].

[Ser55] J.-P. Serre. "Faisceaux algébriques cohérents". *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), pp. 197–278.

[VdB97] M. Van den Bergh. "Existence Theorems for Dualizing Complexes over Non-commutative Graded and Filtered Rings". *J. Algebra* **195.2** (1997), pp. 662–679.

[Yek92] A. Yekutieli. "Dualizing complexes over noncommutative graded algebras". *J. Algebra* **153.1** (1992), pp. 41–84.

[Yek20] A. Yekutieli. *Derived categories*. Vol. 183. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2020, pp. xi+607.